不分岐主系列表現の既約性について (有限群論とその周辺)

加藤, 信一

数理解析研究所講究録
424巻 1981年 125-128

不分岐主系列表現の既約性について

東大.理. 加藤信一

p進体上のreductive群の不分岐主系列表現の理論は. Matsumoto (Springer Lecture Note #590) によって affine Weyl群のHecke環の表現 —— これも (不分岐) 主系列表現とよぶ —— の理論に拡張された。ここでは. この表現の既約性について論じる。

1° <u>affine Weyl 群のHecke環</u>　　以下.

Δ = root系 $\supset \Delta^+$ = 正root系 $\supset \Pi$ = 単純root系,

W = Δ の Weyl 群

$T = \mathbb{Z}\Delta^\vee$ (coroot lattice : 但し $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$ に対して $t_\alpha \in T$ と書くことにする。)

$\tilde{W}$ = Δ の affine Weyl 群

$\underset{\text{def}}{=} W \ltimes T$ (半直積)

とする。ここで $\alpha \in \Delta$ に対して対応する鏡映を $w_\alpha \in W$

と書くと，$S = \{w_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$，$\tilde{S} = S \cup \{w_{\tilde\alpha} \cdot t_{\tilde\alpha}\}$（$-\tilde\alpha$ は Δ の最大 root）とおくことによって $(\tilde{W}, \tilde{S})$，(W, S) は共に Coxeter 系となる。さて $q : \tilde{S} \to \mathbb{C}^\times$ を $q(s) = q(s')$（if $s \overset{\tilde{W}\text{-共役}}{\sim} s'$）となるように定める。
この時，この q に付随した $\tilde{W}$ の Hecke 環 $\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ が次のように定まる：

$\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ は基底 $\{\varepsilon_w\}_{w \in \tilde{W}}$ を持つ $\mathbb{C}$ 上の多元環で，$w \in \tilde{W}$，$s \in \tilde{S}$ に対して積が

$$\varepsilon_s \cdot \varepsilon_w = \begin{cases} \varepsilon_{sw} & l(sw) > l(w) \\ q(s)\varepsilon_{sw} + (q(s)-1)\varepsilon_w & l(sw) < l(w) \end{cases}$$

によって与えられるもの（ε_e = 単位元）。但し，$l(\cdot)$ は $(\tilde{W}, \tilde{S})$ の length function である。

$\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ は $\{\varepsilon_s\}_{s \in \tilde{S}}$ で生成されることを注意しておく。

2° <u>主系列表現</u>　まず $\sqrt{q(s)}$ を各 $s \in S$ に対して選んでおく。但し $q(s) = q(s')$ ならば $\sqrt{q(s)} = \sqrt{q(s')}$ となるものとする。また $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\sqrt{q_\alpha} \underset{\text{def}}{=} \sqrt{q(s)} \quad (\text{if } w_\alpha \overset{W\text{-共役}}{\sim} s \in S)$$

$$\sqrt{q'_\alpha} \underset{\text{def}}{=} \sqrt{q(s')} \quad (\text{if } w_\alpha t_\alpha \overset{\tilde{W}\text{-共役}}{\sim} s' \in \tilde{S})$$

と定め，$\delta^{1/2} \in \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ を $\delta^{1/2}(t_\alpha) = \sqrt{q_\alpha q'_\alpha}$

$(=\sqrt{q_\alpha}\cdot\sqrt{q'_\alpha}\ :\ \alpha\in\Pi)$ によって定義する。

$\lambda\in\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ に対して

$$M_\lambda \underset{\mathrm{def}}{=} \{ f : \tilde{W}\longrightarrow \mathbb{C} \mid f(wt)=(\lambda\delta^{1/2})(t)f(w) \quad (t\in T\ ;\ w\in\tilde{W}) \}$$

とおく。さて，$\alpha_s\in\Delta\ (s\in\tilde{S})$ を

$$\alpha_s = \begin{cases} \beta & (\text{if } s=w_\beta\in S : \beta\in\Pi) \\ \tilde{\alpha} & (\text{if } s\notin S) \end{cases}$$

として，ε_s の M_λ への作用を

$$(\pi(\varepsilon_s)f)(wt) = \begin{cases} f(swt)+(q(s)-1)f(wt) & (w^{-1}(\alpha_s)>0) \\ q(s)f(swt) & (w^{-1}(\alpha_s)<0) \end{cases}$$

$$(f\in M_\lambda\ ;\ w\in W\ ;\ t\in T)$$

で定めると，これは $\mathcal{H}(\tilde{W},q)$ の M_λ への作用に延長されることがわかる。この表現（もしくは M_λ）を，<u>主系列表現</u>とよぶ。$(\dim_{\mathbb{C}} M_\lambda = |W| < \infty)$.

<u>定理</u>(Matsumoto) 任意の $\mathcal{H}(\tilde{W},q)$ の有限次既約表現は，$\exists\lambda\in\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ s.t. M_λ の部分表現となる。

3° <u>既約性</u>　$\alpha\in\Delta$ に対して $\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)\simeq(\mathbb{C}^\times)^\ell$ $(\ell=\#\Pi)$ 上の有理函数，c-函数を

$$c_\alpha(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{\left(1-\sqrt{q_\alpha q'_\alpha}^{\,-1}\lambda(t_\alpha)^{-1}\right)\left(1+\sqrt{q'_\alpha/q_\alpha}\,\lambda(t_\alpha)^{-1}\right)}{1-\lambda(t_\alpha)^{-2}}$$

$$(\lambda \in \mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times))$$

で定義する。 この表示は分母．分子が互いに素とは限らないから．約分した分母．分子をそれぞれ $d_\alpha(\lambda)$, $e_\alpha(\lambda)$ とおく。(e.g. $q \equiv 1$ ならば $d_\alpha(\lambda) = e_\alpha(\lambda) \equiv 1$)。
W は $\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ に自然に作用するので．$\lambda \in \mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ の固定化群を．W_λ と書くことにすると．

<u>定理</u> (Matsumoto) $W_\lambda = \{e\}$ ならば

$$M_\lambda \text{ が既約} \iff e(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \prod_{\alpha\in\Delta} e_\alpha(\lambda) \neq 0 .$$

$W(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \langle w_\alpha \ (\alpha \in \Delta^+) \mid d_\alpha(\lambda) = 0 \rangle$ とおこう。直ちに $W_\lambda \triangleright W(\lambda)$ がわかるが，この時 上の定理の一般化が次のようになされる。

<u>定理</u> M_λ が既約 $\iff \begin{cases} \text{(i)} & e(\lambda) \neq 0 \\ \text{(ii)} & W_\lambda = W(\lambda) \end{cases}$ 。

(注) (i) 講演では Δ = 古典型 の場合について述べたが．その後一般的に証明された。 (ii) 上の定理は p-adic reductive 群についても同様。